
LÖSUNGEN ZU
KONRAD KÖNIGSBERGER: ANALYSIS I

— KAPITEL 1 —

TIM KOPISCHKE
DEZEMBER 2020

Aufgabe 1 : ✓
Aufgabe 2 : ✓
Aufgabe 3 : ✓

Aufgabe 4 : ✓
Aufgabe 5 : ✓
Aufgabe 6 : ✓

Aufgabe 7 : ✓
Aufgabe 8 : ✓
Aufgabe 9 : ✓

Aufgabe 1

(a). **Induktionsanfang** mit $n = 1$. Es ist $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1 + 1)(2 + 1) = 1$.

Induktionsvoraussetzung. Die Behauptung gelte für n .

Induktionsschluss. $n \rightarrow n + 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= (n+1)\left(\frac{1}{6}n(2n+1) + n+1\right) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n(2n+1) + 6n+6) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1) + 1)\end{aligned}$$

■

(b). Mit **Induktionsanfang** und **Induktionsvoraussetzung** analog wie oben folgt dann im **Induktionsschluss**

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2 + (n+1)^3 \\ &= \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 n^2 + n+1\right)(n+1)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right)^2\end{aligned}$$

■

(c). **Induktionsanfang** für $n = 1$. Mit zweifacher Anwendung der dritten binomischen Formel folgt

$$(1+x)(1-x)(1+x^2) = (1-x^2)(1+x^2) = (1-x^4) \quad (1)$$

Induktionsvoraussetzung. Die Behauptung gelte für n .

Induktionsschluss. $n \rightarrow n+1$.

$$(1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^n}) \cdot (1+x^{2^{n+1}}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} (1+x^{2^{n+1}}) = \frac{1-(x^{2^{n+1}})^2}{1-x} = \frac{1-x^{2^{(n+1)+1}}}{1-x}$$

■

Aufgabe 2

Induktionsanfang. Für $n=1$ gilt $S_1^p = 1^p = 1$. Damit folgt

$$\sum_{j=0}^p \binom{p+1}{p+1-j} = \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{p+1-j} 1^j 1^{p+1-j} = \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{p+1-j} 1^j 1^{p+1-j} - 1 = (1+1)^{p+1} - 1$$

Induktionsvoraussetzung. Die Behauptung gelte für n .

Induktionsschluss. $n \rightarrow n+1$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{p+1-j} S_{n+1}^j &= \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{p+1-j} S_n^j + \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{p+1-j} (n+1)^j \\ &= \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{p+1-j} S_n^j + \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{p+1-j} (n+1)^j - (n+1)^{p+1} \\ &= (n+1)^{p+1} - 1 + ((n+1)+1)^{p+1} - (n+1)^{p+1} \quad \square \\ &= ((n+1)+1)^{p+1} - 1 \end{aligned}$$

■

Aufgabe 3

Es gilt $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 1^j 1^{n-j} = (1+1)^n = 2^n$ gemäß des binomischen Satzes.

■

Aufgabe 4

Bildet man alle $0-, 1-, 2-, 3-, \dots, n$ -elementigen Teilmengen mittels Binomialkoeffizienten und zählt diese, so ergibt sich als Summe gemäß Aufgabe 3 gerade $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 2^n$.

■

Aufgabe 5

Es gibt $k!$ mögliche Anordnungen mit Berücksichtigung der Permutationen. Subtrahiert man die Permutationen für jede einzelne Zelle, so erhält man insgesamt gerade $\frac{k!}{k_1! \cdots k_n!}$ Permutationen.

■

Aufgabe 6

Für das erste Teilchen gibt es n Zellen, für das zweite wegen der Exklusivität der Zellen nur noch $n-1$. Für das k -te Teilchen also noch $n-(k-1)$, d.h. insgesamt $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1)) = \binom{n}{k}$ Möglichkeiten.

■

Aufgabe 7

Es gibt n Zellen und damit $n - 1$ Trennwände zwischen diesen n Zellen. Da der Raum zwischen Teilchen und Trennwand bzw. Trennwand und Trennwand irrelevant ist, gibt es insgesamt $n - 1 + k$ Objekte. Die Aufgabe reduziert sich nun auf die Frage, die Anzahl aller Möglichkeiten k "Objekte" aus diesen $n - 1 + k$ abzüglich Permutationen auszuwählen. Die Lösung ist also $\binom{n-1+k}{k}$. ■

Aufgabe 8

Es ist $|\mathbb{N}_m| = m < n = |\mathbb{N}_n|$, also kann es keine n paarweise verschiedenen Bilder geben. ■

Aufgabe 9

Seien $a_1, \dots, a_n$ mit $n = 2l + 1$ für ein $l \in \mathbb{N}$ gemäß Aufgabenstellung gegeben. Für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ gilt, dass $2a \cdot (2b + 1) = 2(2ab + a)$ und $(2a + 1)(2b + 1) = 2(2ab + a + b) + 1$. Also ist das Produkt einer geraden und einer ungeraden Zahl immer gerade während das Produkt zweier ungerader Zahlen wieder ungerade ist.

Zum Widerspruch sei angenommen, dass das Produkt $(a_1 - 1) \cdot (a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$ ungerade ist. Dann müssen alle Faktoren demnach ebenfalls ungerade sein. Somit hat jeder Faktor die Form $a_i - i = 2m_i + 1$ für $m_i \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ und damit $a_i = 2m_i + 1 + i$. Somit sind alle a_i für $i \in \{1, 3, 5, \dots, n\}$ gerade und somit $a_i \in \{2, 4, \dots, n - 1\}$.

Es gilt jedoch, dass $|\{2, 4, \dots, n - 1\}| = \frac{n+1}{2} - 1 < \frac{n+1}{2} = |\{1, 3, 5, \dots, n\}|$. Nach dem Schubfachprinzip gibt es somit für jede Abbildung $f : \{1, 3, 5, \dots, n\} \rightarrow \{2, 4, \dots, n - 1\}$ Werte $i_1, i_2 \in \{1, 3, 5, \dots, n\}$ so, dass $a_{i_1} = f(i_1) = f(i_2) = a_{i_2}$. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass alle a_i paarweise verschieden sind. ■